

Beszámoló a 2023. évi Eötvös-versenyről



Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2023. évi Eötvös-versenye október 13-án délután 3 órai kezdettel tíz magyarországi helyszínen³ került megrendezésre. Ezért külön köszönettel tartozunk mindazoknak, akik ebben szervezéssel, felügyelettel a segítségünkre voltak. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc áll rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de (nem programozható) zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 64 versenyző adott be dolgozatot, 16 egyetemista és 48 középiskolás.

Ismertetjük a feladatokat és azok megoldását.



1. A Vénusz 2023. szeptember 12-én 2 óra 20 perccel a Nap előtt kelt fel, szinte egyszerre a Holddal. A Hold ekkor egy vékony C alakot formázott, a Vénuszt viszont szabad szemmel egy fényes „csillag”-nak, pontszerűnek láthattuk.

a) Milyen alakúnak láttuk volna ezen a hajnalon a Vénuszt távcsővel, ha tudjuk, hogy másnap néhány perccel hamarabb kelt fel a Naphoz viszonyítva? Mekkora volt a fázisa (a korong hányad része volt látható)?

b) Hogyan változik a Vénusz alakja és látszólagos mérete az ezt következő hónapokban? Mikor fog legközelebb újra 2 óra 20 perccel a Nap előtt kelni? Ábrázoljuk méretarányosan a szeptemberben, valamint a kérdéses időpontban látható Vénuszt!

Az egyszerűség kedvéért a pályák excentricitását és ferdeségét, valamint a Föld tengelyferdeségét ne vegyük figyelembe. (A megadott adatok is ennek megfelelően módosítottak a valósághoz képest, és az eredményt is ebben a közelítésben keressük.) A Vénusz pályasugara 0,723-szerese a Földének.

(Vankó Péter)

Megoldás. Vizsgáljuk a bolygók mozgását a Föld keringésével együtt forgó vonatkoztatási rendszerben. Készítsünk vázlatot a bolygókról. Az 1. ábrán a Nap és a Föld középpontja áll, a Vénusz (egy később meghatározandó relatív szögsebességgel) kering a Nap körül, a Föld pedig 24 óránként körbefordul a tengelye körül.

a) A feladat szövege szerint a Vénusz 2 óra 20 perccel (2,33 órával) kel a Nap előtt. Mivel a Föld óránként $360^\circ/24 = 15^\circ$ -ot fordul el a tengelye körül, ez azt jelenti, hogy a Vénusz a Földről $\varphi = 2,33 \cdot 15^\circ = 35^\circ$ -os szögben látszik a Naphoz képest.

³Részletek a verseny honlapján: <http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm>

A Vénusz akkor kel a Naphoz képest legkorábban, azaz φ értéke akkor lesz maximális, amikor $\vartheta = 90^\circ$ (és így a fázis 0,5, azaz „fél vénusz” látható).

Ezután φ értéke már csökken, a Vénusz egyre kevesebb idővel kel a Nap előtt. Ugyanakkor ϑ értéke továbbra is csökken, a Vénusz fázisa pedig tovább növekszik, látszólagos átmérője viszont a növekvő távolság miatt tovább csökken.

A feladatban szereplő állapotot, amikor a Vénusz újra 2 óra 20 perccel kel a Nap előtt, az α_2 Föld–Nap–Vénusz szögénél érjük el. Ebben az esetben ismét $\varphi = 35^\circ$, $\vartheta_2 = 180^\circ - \vartheta_1 = 52,5^\circ$, $\alpha_2 = 180^\circ - \varphi - \vartheta_2 = 92,5^\circ$. A Vénusz fázisa ekkor

$$f_2 = \frac{1 + \cos \vartheta_2}{2} \approx 0,80.$$

Mikor fog ez bekövetkezni? A Vénusz *sziderikus* (csillagokhoz viszonyított) keringési ideje Kepler 3. törvénye alapján:

$$T_V = \left(\frac{r_V}{r_F} \right)^{\frac{3}{2}} T_F = 224,5 \text{ nap.}$$

($T_F = 365,25$ nap.) A *szinodikus* (Földhöz viszonyított) keringési ideje

$$T'_V = \left(\frac{1}{T_V} - \frac{1}{T_F} \right)^{-1} \approx 583 \text{ nap,}$$

hiszen az általunk vizsgált koordináta-rendszerben a Vénusz keringésének szögsebessége $\Omega'_V = \Omega_V - \Omega_F$.

A két vizsgált helyzet között $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 75^\circ$ -kal fordul el a Naptól a Vénuszhoz húzott sugár az általunk használt vonatkoztatási rendszerben. Ehhez

$$t = \frac{\Delta\alpha}{360^\circ} T'_V \approx 121 \text{ nap}$$

időre van szükség. Eszerint a Vénusz – ebben a közelítésben számolva – legközelebb körülbelül négy hónappal később, 2024. január 11-én fog ismét 2 óra 20 perccel a Nap előtt kelni.

Vizsgáljuk a Vénusz látszólagos átmérőjét!

Legnagyobbinak Föld-közelben látnánk, ekkor $d_{\min} = r_F - r_V = 0,277r_F$ (de ekkor persze „újjénusz” van, és a Vénusz a Nappal együtt kel, a Földről nem látható⁴). A változó Föld–Vénusz távolságot az 1. ábra szerint a szinusztétel alapján számolhatjuk ki:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta} = \frac{d}{r_F},$$

amiből

$$d = \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta} r_F.$$

⁴A pályaferdeségek miatt a Vénusz általában nem halad el a Nap előtt, de 120 évente 8 év különbséggel kétszer igen. Legutóbb 2004-ben és 2012-ben figyelhattunk meg Vénusz-átvonulást a Nap korongja előtt. http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/erdekes/venusz_teto.htm

A Vénusz látszólagos D átmérője fordítottan arányos a Föld–Vénusz távolsággal:

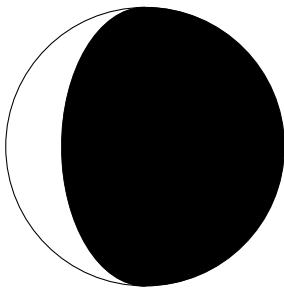
$$D = \frac{d_{\min}}{d} D_{\max}.$$

Ez alapján az 1-es és 2-es helyzetben

$$D_1 = \frac{0,277 \sin \vartheta_1}{\sin \alpha_1} D_{\max} = 0,73 D_{\max},$$

illetve

$$D_2 = \frac{0,277 \sin \vartheta_2}{\sin \alpha_2} D_{\max} = 0,22 D_{\max},$$



amiből

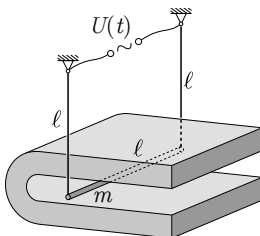


$$\frac{D_2}{D_1} = 0,30.$$

3. ábra

A kiszámított fázisok és relatív látszólagos átmérők alapján a feladatban kért rajz a 3. ábrán látható.

Megjegyzés. A Föld tengelyferdesége és a Vénusz pályájának ekliptikához viszonyított dőlése miatt a valódi kelési idők jelentősen eltérnek az itteniektől, azonban a delelési idők közötti különbségek (amelyeket sokkal kevésbé befolyásolnak ezek a tényezők) a valóságban elfogadhatóan egyeznek az itt számoltakkal. A két bolygó pályájának excentricitása csak nagyon kis eltéréseket okoz.



4. ábra

2. Egy $m = 50 \text{ g}$ tömegű, $\ell = 20 \text{ cm}$ hosszúságú fémrudat két, ugyancsak ℓ hosszúságú fémszállal vízszintes helyzetben felfüggesztünk. A rudat egy széles patkómágnes pólusai közé helyezzük, így a rúd teljes egészében $B = 0,50 \text{ T}$ indukciójú, jó közelítéssel homogén mágneses mezőbe merül. A fémszállak és a rúd együttes elektromos ellenállása $r = 0,10 \Omega$. A fémszállak felső végei közé $U_0 = 10 \text{ mV}$ amplitúdójú, $f = 1,0 \text{ Hz}$ frekvenciájú szinuszos váltófeszültséget kapcsolunk.

Hogyan mozog a rúd hosszabb idő után? A közegellenállást hanyagoljuk el!

(Vigh Máté)

Megoldás. Az ingán keresztül $I(t)$ áram folyik, így mozgása közben a nehézségi erőn kívül az $F_L = BI\ell$ nagyságú Lorentz-erő is hat rá.

A forgómozgás alapegyenlete:

$$m\ell^2\ddot{\varphi} = IB\ell^2 \cos \varphi - mg\ell \sin \varphi,$$

ahol $m\ell^2$ az inga tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre vonatkoztatva. Kis φ szögkitérést feltételezve $\cos \varphi \approx 1$ és $\sin \varphi \approx \varphi$, ezt felhasználva:

$$I(t) = \frac{m}{B}\ddot{\varphi} + \frac{mg}{B\ell}\varphi.$$

A mozgó rúdban a mágneses tér hatására $U_i(t) = B\ell^2\dot{\varphi}$ feszültség indukálódik. Az áramkörre a huroktörvényt felírva

$$U(t) = rI(t) + U_i(t),$$

és abba $I(t)$ és $U_i(t)$ kifejezését behelyettesítve az

$$U(t) = \frac{mr}{B}\ddot{\varphi} + B\ell^2\dot{\varphi} + \frac{mgr}{B\ell}\varphi$$

egyenletet kapjuk, ahol $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ és $\omega = 2\pi f$.

Ennek megoldására két lehetséges utat is ismertetünk.

I. megoldás. Felismerhetjük, hogy ez egy csillapított kényszerrezgés mozgásegyenlete:

$$\ddot{\varphi} + \frac{B^2\ell^2}{mr}\dot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = \frac{BU_0}{mr} \sin(\omega t),$$

amelynek állandósult megoldását

$$\varphi(t) = \varphi_{\max} \sin(\omega t - \phi)$$

alakban kereshetjük. Vezessük be a következő, kényszerrezgéseknél szokásosan alkalmazott jelöléseket:

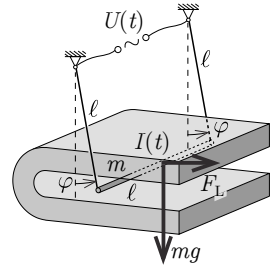
$$\frac{B^2\ell^2}{mr} = 2\beta, \quad \frac{g}{\ell} = \omega_0^2 \quad \text{és} \quad \frac{BU_0}{mr} = f_0.$$

A próbafüggvényt behelyettesítve a mozgásegyenletbe (vagy a megoldást az irodalomból kikeresve) adódik, hogy

$$\varphi_{\max} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{\frac{BU_0}{mr}}{\sqrt{\left(\frac{g}{\ell} - \omega^2\right)^2 + \frac{B^4\ell^4\omega^2}{m^2r^2}}} \approx 3,6^\circ,$$

és

$$\phi = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \arctg \frac{\frac{B^2\ell^2\omega}{mr}}{\frac{g}{\ell} - \omega^2} \approx 52,7^\circ.$$



5. ábra

Az inga tehát hosszabb idő után a rákapcsolt feszültséggel azonos, 1 Hz-es frekvenciával, de attól $52,7^\circ$ -os fázissal lemaradva, $3,6^\circ$ -os amplitúdóval leng.

A kitérés valóban kis szögű, így a közelítések jogosak voltak.

Bár a feladat nem kérdezte, a szögkitérés ismeretében érdekes meghatározunk a rúdban folyó áramerősséget:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{m}{B} \ddot{\varphi} + \frac{mg}{B\ell} \varphi = \frac{m}{B} \left(-\omega^2 + \frac{g}{\ell} \right) \varphi_{\max} \sin(\omega t - \phi) = \\ &= \frac{U_0}{r} \frac{\frac{g}{\ell} - \omega^2}{\sqrt{\left(\frac{g}{\ell} - \omega^2\right)^2 + \frac{B^4 \ell^4 \omega^2}{m^2 r^2}}} \sin(\omega t - \phi) = I_0 \sin(\omega t - \phi), \end{aligned}$$

ahol $I_0 \approx 61$ mA.

Fontos megjegyezni, hogy (az indukált feszültség miatt)

$$I(t) \neq \frac{U_0 \sin(\omega t)}{r},$$

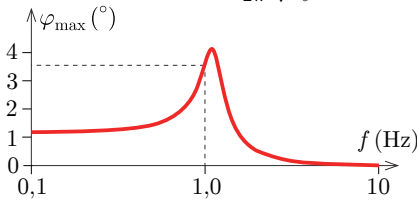
tehát az áramerősség nincs fázisban a rákapcsolt feszültséggel.

Ellenőrzésként kiszámolhatjuk a feszültségforrást terhelő (bemenő) és az ellenálláson disszipálódó teljesítményeket:

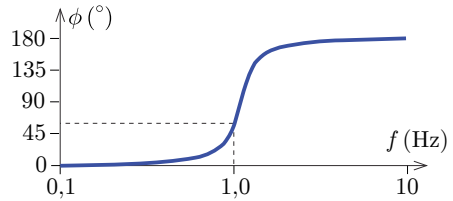
$$P_{\text{átl}} = \frac{U_0 I_0 \cos \phi}{2} = \frac{I_0^2 r}{2} \approx 18 \text{ mW}.$$

Ezek a várakozásunknak megfelelően egyenlők.

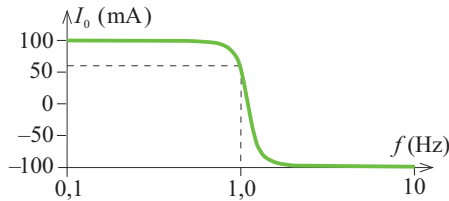
A 6., 7. és 8. ábrán a $\varphi_{\max}$ maximális szögkitérést, a ϕ fáziskülönbséget és az I_0 maximális áramerősséget ábrázoltuk a gerjesztő frekvencia függvényében. Látható, hogy a feladatban szereplő gerjesztés a rezonanciához közeli (az inga sajátfrekvenciája $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}} \approx 1,1$ Hz).



6. ábra



7. ábra



8. ábra

II. megoldás. Vessük össze a mozgásegyenletet a soros RLC -körre felírt huroktörvénnyel (a szokásos jelölésekkel):

$$U(t) = L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q.$$

A két rendszer között tehát az alábbi megfeleltetés állítható fel:

$$Q \rightarrow \varphi, \quad L \rightarrow \frac{mr}{B}, \quad R \rightarrow B\ell^2, \quad \frac{1}{C} \rightarrow \frac{mgr}{B\ell}.$$

Az áramkörös analógiában ismert, hogy az áramerősség az idő függvényében $I^*(t) = I_0^* \sin(\omega t - \phi^*)$ módon változik, ahol az amplitúdó és a fázisszög:

$$I_0^* = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}},$$

és

$$\phi^* = \arctg \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}.$$

A töltés az idő függvényében (vagy integrálással vagy a harmonikus rezgőmozgás analógiájával):

$$Q(t) = -\frac{I_0^*}{\omega} \cos(\omega t - \phi^*).$$

Megjegyzés. Az I^* és ϕ^* jelöléseket azért használjuk, hogy megkülönböztessük az áramkörös analógiában szereplő és a valódi ingában folyó áramerősséget, valamint az analógiában az áram és a feszültség, illetve a valóságban az inga szögkitérése és a feszültség közötti fázisszögeket.

Az áramkörös hasonlatot felhasználva most már megadhatjuk a felfüggesztett rúd szögkitérését az idő függvényében:

$$\varphi(t) = -\varphi_{\max} \cos(\omega t - \phi^*) = \varphi_{\max} \sin(\omega t - \phi),$$

ahol

$$\varphi_{\max} = \frac{I_0^*}{\omega} = \frac{\frac{U_0}{\omega}}{\sqrt{B^2\ell^4 + (\frac{mr\omega}{B} - \frac{mgr\omega}{B\ell})^2}} \approx 3,6^\circ,$$

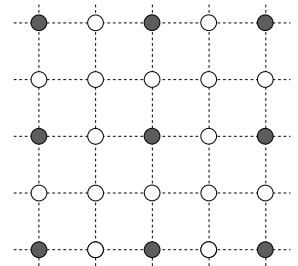
és

$$\phi = \phi^* + 90^\circ = \arctg \frac{\frac{mr\omega}{B} - \frac{mgr\omega}{B\ell\omega}}{B\ell^2} + 90^\circ = -37,3^\circ + 90^\circ = 52,7^\circ,$$

a korábbi eredményekkel egyezően.

3 Egy átlátszatlan lapon egyforma, kicsiny lyukak találhatók szabályos négyzetrács elrendezésben. Ha a lapot monokromatikus, a rácsállandónál jóval nagyobb hullámhosszúságú lézernyílással merőlegesen megvilágítjuk, akkor a távoli ernyőn szabályos négyzetrács elrendezésű, I_0 intenzitású fénypöttyöket láthatunk.

Hogyan változik meg az elhajlási kép, ha a lapon minden második sor minden második nyílását eltakarjuk az ábrán látható módon? Mekkora lesz az egyes fénypöttyök intenzitása?



9. ábra

(Széchenyi Gábor)

Megoldás. Sajnálatos módon a feladat szövegében maradt egy hiba: a lézerfényről szóló „a rácsállandónál jóval nagyobb hullámhosszúságú” félmondat ellentmond annak, hogy a távoli ernyőn szabályos négyzetrács elrendezésű diffrakciós kép keletkezik. Helyesen „a rácsállandónál kisebb hullámhosszúságú”-t kellett volna írni (a nagyon kicsi hullámhossz esetén a diffrakciós ábra nagyon apró lenne, vagy nagyon messze kellene helyezni az ernyőt). A megoldásban, ahogy látni fogjuk, nincs szükség a hullámhosszra, ezért kerülhetett el a hiba sokszori átolvasás után is a szemünket. Elnézést kérünk érte!

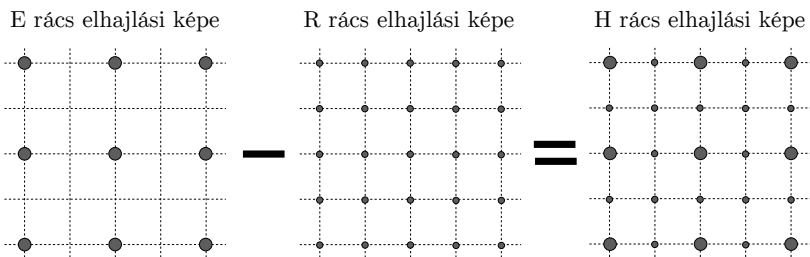
A Huygens–Fresnel-elv alapján a nyílások mindegyikéből azonos fázisú gömbhullámok indulnak ki. Az eredeti rács diffrakciós ábráján ott jelennek meg fénylő pontok, ahol a nyílásokból kiinduló gömbhullámok konstruktívan interferálnak. Ha a nyílások egynegyedét letakarjuk, akkor a korábbi fénylő pontok helyére csak háromnegyed annyi nyílásból érkeznek be a gömbhullámok, így a tér amplitúdója is háromnegyedére csökken. Az intenzitás az amplitúdónégyzettel arányos, így ezen fénypöttyök intenzitása $9/16 I_0$ lesz. Továbbiakban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy megjelennek-e további intenzitásmaximumok az ernyőn.

A feladatban szereplő hiányos rács (H rács) felfogható úgy mint az eredeti négyzetrács (E rács) és egy ritkább négyzetrács (R rács) különbsége. Mivel a diffrakciót leíró Maxwell-egyenletek lineárisak, így az E rács és R rács esetében kialakuló tér különbségének a H rács által keltett térrel kell megegyeznie. Érdeemes megjegyezni, hogy ilyenkor a hullámok fázishelyes különbségét kell képezni, nem lehet közvetlenül az intenzitásokat kivonni.

Az E rács esetében a diffrakciós mintázatot ismerjük, ez négyzetrács elrendezésű fénypöttyök összessége. A diffrakciós ábra rácsállandója legyen a , a fénypöttyök helyén a tér amplitúdója pedig A .

Az R rács egy kétszer akkora rácsállandójú négyzetrács, így a megjelenő diffrakciós képet szintén négyzetrács elrendezésű fénypöttyök alkotják, de a rácsállandó $a/2$, azaz a diffrakciós ábra sűrűbb, mint az eredeti esetben. (Ez az inverziós tulajdonság már a hagyományos optikai rácsnál is megmutatható. Ha az optikai rácsot kétszeresére megnyújtjuk, akkor a diffrakciós ábrát a felére kell összenyomni.) Az R rács esetében a fénypöttyök helyén a tér amplitúdója $A/4$, mivel csak negyedannyi nyílás van az apertúrán, így a hullámok eredő amplitúdója 4-szer kisebb.

Következőekben az E és az R rács esetében kialakuló téreloszlások különbségét kell képezni. Azokban a pontokban, ahol az E és R rács esetében is nem nulla a tér, ott az első bekezdésben leírt gondolatmenetet megismételve $A - A/4 = 3/4 A$ lesz az amplitúdó értéke, így az intenzitás $9/16 I_0$ -nak adódik. Azokban a pontokban,



10. ábra

ahol csak az R rács esetében nem nulla a tér, ott a különbség $-A/4$ -nek adódik. A negatív előjel arra utal, hogy a H rács ezen a pontjaiban éppen ellentétes a fázis. Az intenzitás ismételt az amplitúdónégyzettel arányos, így ezekben a pontokban $1/16 I_0$ intenzitású fénypöttyöket láthatunk.

A letakart rács elhajlási képe egy kétszer sűrűbb négyzetrács, ahol az eredeti fénypöttyök helyén az intenzitás $9/16 I_0$, az újonnan megjelenő pontok intenzitása pedig $1/16 I_0$. A megoldás elsőre kissé meglepő. Letakartunk néhány pontot az apertúrán, melynek hatására nem eltűntek a pontok az elhajlási ábráról, hanem újabbak jelentek meg.

Ellenőrzésképpen számítsuk ki, hogyan változott meg az ernyőn mérhető össz-intenzitás a letakarás nyomán. Kezdetben I_0 intenzitású fénypöttyeink voltak, melyek intenzitása lecsökkent $9/16 I_0$ -ra. Ellenben megjelentek kisebb intenzitású pontok is, minden nagy intenzitású pontra három kis intenzitású pont jut. Szemben megfogalmazva, a H rács elhajlási képének elemi cellájában egy $9/16 I_0$ és három $1/16 I_0$ fénypötty található. Az elemi cellában így az összintenzitás $3/4 I_0$. Az ernyőn mérhető összintenzitás a $3/4$ -edére csökkent, ami megegyezik az előzetes elvárásunkkal, miszerint a nyílások $1/4$ -ét takartuk el, így a kezdeti esethez képest csak a fény intenzitásának $3/4$ -e jut át.



Az ünnepélyes eredményhirdetésre és díjkiosztásra 2023. november 24-én délután került sor az ELTE TTK Konferenciatermében. Megemlékeztünk az 50 és 25 évvel ezelőtti Eötvös-versenyről, ismertettük az akkori feladatokat és a győztesek nevét. Ezután következett a 2023. évi verseny feladatainak és megoldásainak bemutatása. Az 1. és 2. feladat megoldását *Vankó Péter*, a 3. feladatét *Széchenyi Gábor* ismertette.

Az esemény végén került sor az eredményhirdetésre. A díjakat *Ormos Pál*, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke adta át.

I. díjat a versenybizottság nem adott ki.

A harmadik feladat helyes, valamint az első és második feladat hiányos megoldásáért *második díjat* nyert **Fey Dávid**, az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumban érettségizett *Nagy Piroska Mária* tanítványaként.

A második feladat helyes megoldásáért és a másik két feladatban elért rész-eredményekért, illetve az első feladat hiányos megoldásáért és a második feladatban elért részeredményekért *harmadik díjat* nyert **Molnár Barnabás**, az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumban érettségizett *Nagy Piroska Mária* tanítványaként (2. helyezett) és **Seprődi Barnabás**, az Óbudai Árpád Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Gärtner István* tanítványa (3. helyezett).

Az első feladat hiányos megoldásáért *dicséretet* kapott **Beke Bálint**, a BME fizikus-mérnök BSc szakos hallgatója, aki az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégiumban érettségizett *Zsigri Ferenc* tanítványaként (4. helyezett), **Sarkadi Sándor István**, az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a nyíregyházi Szent Imre Katolikus Gimnáziumban érettségizett *Bartáné Cserny Katalin*