

Beszámoló a 2021. évi Eötvös-versenyről



Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2021. évi Eötvös-versenye október 15-én délután 3 órai kezdettel tíz magyarországi helyszínen¹ került megrendezésre. Ezért külön köszönettel tartozunk mindazoknak, akik ebben szervezéssel, felügyelettel a segítségünkre voltak. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc áll rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de (nem programozható) zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 69 versenyző adott be dolgozatot, 14 egyetemista és 55 középiskolás.

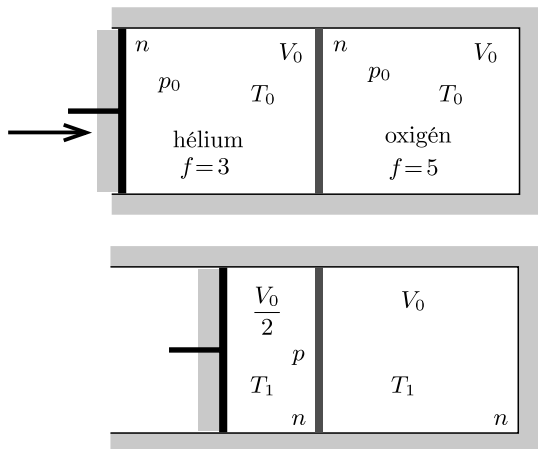
Ismertetjük a feladatokat és azok megoldását.



1. feladat. *Egy hőszigetelt, hengeres tartályt egy jó hővezető, rögzített fal oszt két egyforma henger alakú térrészre. Az egyik térfélben héliumgáz, a másikban azzal megegyező anyagmennyiségű oxigéngáz található, mindkét gáz kezdeti hőmérséklete T_0 , kezdeti térfogata pedig V_0 . A tartály egyik végét könnyen mozgó, hőszigetelő dugattyú zárja le, amellyel a héliummal töltött térrész térfogata változtatható. Határozzuk meg a hengerben lévő gázok végső hőmérsékletét, miután a dugattyú lassú mozgásával a héliumgáz térfogatát $V_0/2$ -re csökkentettük!*

(Vigh Máté)

Megoldás. Az 1. ábra a kezdeti állapotot és a végállapotot mutatja.



1. ábra

¹Részletek a verseny honlapján: <http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm>.

Feladatunk a T_1 hőmérséklet meghatározása. Ezt többféle módszerrel is megtehetjük.

I. megoldás. Legyen a héliumgáz lassan változó pillanatnyi hőmérséklete T , térfogata V . Az elválasztó fal jó hővezetése miatt az oxigéngáz hőmérséklete is T . Ha a dugattyú elmozdulása miatt a hőmérséklet ΔT értékkel nő, a héliumgáz térfogata pedig ΔV értékkel változik meg ($\Delta V < 0$), akkor az egész rendszer belső energiájának változása

$$(1) \quad \Delta E = \frac{3}{2}nR \Delta T + \frac{5}{2}nR \Delta T = 4nR \Delta T.$$

A héliumgáz nyomása:

$$p = nR \frac{T}{V}.$$

Az egész rendszerre alkalmazott első főtétel szerint

$$-p\Delta V = \Delta E,$$

vagyis

$$(2) \quad \frac{\Delta V}{V} + 4 \frac{\Delta T}{T} = 0.$$

Szorozzuk meg (2)-t $T^4 V$ -vel, és használjuk ki, hogy a megváltozások kicsik (ezért a négyzetüket és a magasabb hatványait elhanyagolhatjuk):

$$T^4 \Delta V + 4T^3 V \Delta T = \Delta(T^4 V) = 0,$$

tehát $T^4 V$ a folyamat során állandó marad. A héliumgáz kezdeti és végállapotát összehasonlítva kapjuk, hogy

$$T_0^4 V_0 = T_1^4 \frac{V_0}{2}, \quad \text{vagyis} \quad T_1 = \sqrt[4]{2} T_0 \approx 1,2 T_0.$$

Ugyanezt az eredményt az (1)-ben szereplő kicsiny változások összegzésével (integrálással) is megkaphatjuk:

$$\int_{V_0}^{V_0/2} \frac{1}{V} dV + 4 \int_{T_0}^{T_1} \frac{1}{T} dT = -\ln 2 + 4 \ln \frac{T_1}{T_0} = 0,$$

vagyis

$$T_1 = \sqrt[4]{2} T_0.$$

II. megoldás. Az (1) egyenlet szerint a folyamat tekinthető egy $f = 8$ szabadsági fokú gáz adiabatikus összenyomásának. Erre a folyamatra a fajhőhányados $\kappa = \frac{f+2}{f} = \frac{5}{4}$, tehát az adiabatikus állapotváltozás egyenlete:

$$T V^{\kappa-1} = T V^{1/4} = \text{állandó},$$

ahonnan $T_1 = \sqrt[4]{2} T_0$.

III. megoldás. Kézikönyvekben² és képletgyűjteményekben megtalálható, hogy n mol anyagmennyiségű, f szabadsági fokú molekulákból álló, T hőmérsékletű és V térfogatú ideális gáz entrópiája

$$S(T, V) = \frac{f}{2} nR \ln \frac{T}{T_0} + nR \ln \frac{V}{V_0}.$$

Az entrópia nullpontja önkényesen választható, a fenti képletben például

$$S(T_0, V_0) = 0$$

(ahol T_0 és V_0 lehet a feladatban szereplő kezdeti hőmérséklet és térfogat).

A vizsgált folyamatban nincs hőcsere a rendszer és a környezete között, továbbá (a dugattyú lassú mozgatása esetén) a folyamat reverzibilis, így a rendszer entrópiája változatlan marad:

$$\left(\frac{f_{\text{He}}}{2} nR \ln \frac{T_1}{T_0} + nR \ln \frac{V_0/2}{V_0} \right) + \left(\frac{f_{\text{O}_2}}{2} nR \ln \frac{T_1}{T_0} + nR \ln \frac{V_0}{V_0} \right) = 0,$$

vagyis (tudva, hogy $f_{\text{He}} = 3$ és $f_{\text{O}_2} = 5$)

$$4 \ln \frac{T_1}{T_0} + \ln \frac{1}{2} = 0,$$

azaz a $T_1 = \sqrt[4]{2} T_0$ eredmény adódik.

Megjegyzés. Ha a héliumgáz térfogatát olyan gyorsan csökkentjük a felére, hogy az oxigén nem tud azonnal felmelegedni, akkor a folyamat irreverzibilissé válik, vagyis az entrópia nőni fog. Mivel adott térfogat esetén a magasabb hőmérséklethez tartozik nagyobb entrópia, a dugattyú hirtelen elmozdítása után a két gáz végül (a hőmérséklet kiegyenlítése után) jobban felmelegszik, mint a feladatban szereplő lassú összenyomásnál.

2. feladat. Egy henger alakú, ℓ hosszúságú és $R \ll \ell$ sugarú, légmagos szolenoid meneteinek száma N . A tekercs belsejébe egy $r \ll R$ sugarú, a szolenoid szimmetriatengelyére merőleges síkú, L induktivitású szupravezető gyűrűt helyezünk (a gyűrű és a szolenoid középpontja egybeesik).

a) Növekszik vagy csökken a szolenoid induktivitása a gyűrű behelyezése következtében?

b) Határozzuk meg az induktivitás megváltozásának nagyságát!

(Széchenyi Gábor)

Megoldás. a) A szupravezető fázisban lévő anyagoknak az az egyik különleges tulajdonságuk, hogy az elektromos ellenállásuk nulla. Ha egy szupravezető gyűrűben feszültség indukálódna, akkor az Ohm-törvény alapján végtelen nagy áramnak kellene benne folynia. Ennek a fizikai képtelenségnek a feloldása az, hogy a szupravezető gyűrűben nem indukálódhat feszültség, azaz a gyűrűn áthaladó mágneses fluxus értéke nem változhat meg.

²Lásd pl. a 333+ Furfangos Feladat Fizikából 194. feladatának megoldását.

Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy kezdetben, amikor a szolenoidban nulla az áramerősség, akkor a szupravezető gyűrűben sem folyik áram, így a rajta áthaladó mágneses fluxus értéke nulla. Ez az érték akkor sem változhat meg, ha a tekercsben áram folyik. Hogyan lehetséges ez, hiszen a szolenoid mágneses tere miatt meg kellene jelennie egy véges fluxusnak a gyűrűben. Úgy, hogy a gyűrűben olyan áram indukálódik, mely azonos nagyságú, de ellentétes előjelű fluxust hoz létre a gyűrűn. Ennek az áramnak a hatására a tekercsen áthaladó mágneses fluxus értéke és így a tekercs induktivitása is kisebb lesz, mint a szupravezető gyűrű nélküli esetben.

b) Vizsgáljuk az előbb leírt jelenséget kvantitatívan. Legyen a szolenoid árama I . A szolenoid közepén elhelyezett szupravezető gyűrűn áthaladó mágneses fluxus értéke

$$\Phi_{\text{gyűrű}} = L \cdot i + M \cdot I,$$

ahol L a gyűrű öninduktivitása, i a gyűrű árama, M a szolenoid és a gyűrű kölcsönös indukciós együtthatója, ami megadja, hogy az egyikben folyó egységnyi erősségű áram hatására mekkora mágneses fluxus jön létre a másikban. (Belátható, hogy M nagysága a szereplők felcserélésekor nem változik, tehát mindegy, hogy a gyűrű árama által a szolenoidban keltett mágneses fluxust számítjuk ki, vagy a szolenoid árama által a gyűrűben keltett fluxust vizsgáljuk. Ez utóbbi nyilván könnyebb feladat.) M értékét a feladatban megadott geometriára könnyen kiszámolhatjuk. Az I erősségű árammal átjárt szolenoidban a homogén mágneses tér indukcióvektorának nagysága $\frac{\mu_0 N I}{\ell}$. Mivel a gyűrű síkja merőleges a mágneses tér irányára, a gyűrűn áthaladó mágneses fluxus $\frac{\mu_0 N I}{\ell} r^2 \pi$. Innen kiolvashatjuk a kölcsönös indukciós együttható értékét:

$$M = \frac{\mu_0 N}{\ell} r^2 \pi.$$

A gyűrű fluxusa nem változik meg, ha a szolenoid áramát nulláról I -re növeljük, így $\Phi_{\text{gyűrű}} = 0$, ahonnan a gyűrűben folyó áram értéke

$$i = -\frac{M I}{L}.$$

A szolenoidon áthaladó mágneses fluxus értéke:

$$\Phi_{\text{szolenoid}} = L_0 \cdot I + M \cdot i,$$

ahol L_0 a szolenoid öninduktivitása. Behelyettesítve a gyűrű áramát, a következőt kapjuk:

$$\Phi_{\text{szolenoid}} = \left(L_0 - \frac{M^2}{L} \right) I.$$

Láthatjuk, hogy a szolenoidon áthaladó mágneses fluxus arányos a szolenoid áramával. Az arányossági tényező a szupravezető gyűrűt tartalmazó szolenoid induktivitása, mely

$$\Delta L_0 \equiv \frac{M^2}{L} = \frac{\mu_0^2 N^2 r^4 \pi^2}{\ell^2 L}$$

értékkel kisebb, mint a gyűrű nélküli szolenoid öninduktivitása.

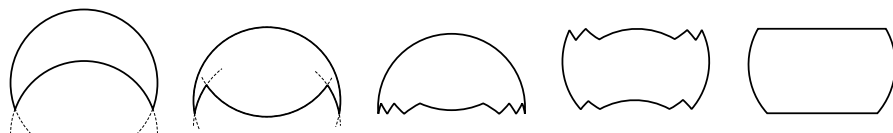
Ugyanezt az eredményt kaptuk volna, ha a számolás során nem tételezzük fel, hogy kezdetben a szupravezető gyűrűben nulla áram folyik. A leírt levezetés kis módosítással használható a szupravezető tetszőleges előlétele esetén is. Ekkor i , $\Phi_{\text{gyűrű}}$ és $\Phi_{\text{szolenoid}}$ azt adja meg, hogy mennyivel változott meg a gyűrű árama, valamint a gyűrűn és a szolenoidon áthaladó mágneses fluxus értéke, miközben a tekercs áramát nulláról I -re növeltük.

3. feladat. *Egy felfújható strandlabda könnyű, vékony, igen hajlékony, de nem nyújtható műanyagból készült. Felfújtt állapotában a labda majdnem pontosan gömb alakú, sugara 20 cm. Egy kísérletben a labdát úrtartalmának feléig felfújjuk levegővel, majd egy vízszintesen tartott, nagy kiterjedésű síklap segítségével fokozatosan víz alá nyomjuk, míg az teljesen el nem merül a vízben. Vázoljuk fel, milyen alakot vesz fel a víz alá nyomott labda! Ha tudjuk, határozzuk meg az alak releváns méreteinek számszerű értékeit is!*

(Vigh Máté)

Megoldás. A feladat szövege szerint a labda anyaga „igen hajlékony, de nem nyújtható”. Ezért az egyetlen lehetséges módszer a labda térfogatának csökkentése, ha a labdát „behorpasztjuk” (*első rajz a 2. ábrán*), ekkor a felület két (ugyanolyan r sugarú) gömbfelületdarabból áll. A behorpadt gömbfelületen azonban újabb horpadás is lehetséges – ezúttal kifele –, ahogy az ábra *második rajzán* látszik. Ezt tetszőleges számban megismételhetjük, így akár közel síklapot is kialakíthatunk, amely azonban a valóságban egy kicsit „ráncos”, vékony, ki-behajló gömbfelszíndarabokból áll (*középső rajz*).

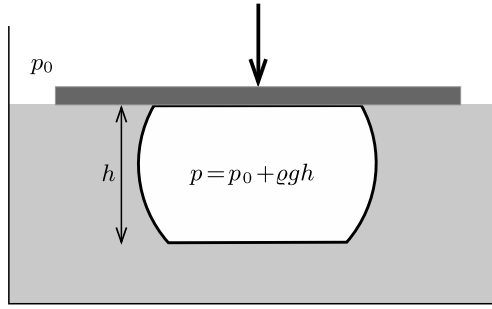
Látni fogjuk, hogy fizikai feltételek miatt a labda alsó és felső része is így fog deformálódni (*negyedik rajz*). A „ráncokat” (amelyek elvileg tetszőlegesen finomak lehetnek, de egy valódi kísérletben azért látszanak) már nem ábrázolva egy gömbövet kapunk (*utolsó rajz a 2. ábrán*).



2. ábra

Eddig csak a geometria által lehetséges deformációkról beszéltünk. Ezután meg kell vizsgálnunk, hogy az adott kísérletben a fizikai feltételek következtében milyen alak jön létre. A labda tetejét a síklap nyomja le a víz alá, így ott a labda rásimul a felületre. Érdekesebb kérdés a labda aljának alakja: mivel a labda „igen hajlékony”, a gyűrt felületen olyan alakot vesz fel, hogy a belső és a külső nyomás mindenhol azonos legyen. A labdán belül mindenhol azonos a légnyomás (a levegő csekély aerosztatikus nyomását elhanyagoljuk), a víz nyomása viszont a mélységgel változik ($p = p_0 + \rho gh$), így a labda aljának is vízszintes síklapnak kell lennie (*3. ábra*).

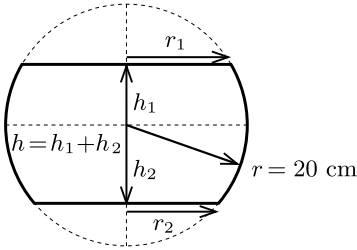
A labda alakja tehát egy vízszintes síklappal határolt *gömbö*.



3. ábra

A feladat második részében meg kell határozni a gömbövé méreteit. A jelölések a 4. ábrán láthatók.

Vizsgáljuk először a geometriai feltételt: a gömbövé térfogata a gömb térfogatának fele. (A gömbövé térfogata képletgyűjteményekből ki-kereshető, vagy integrálással könnyen kiszámítható.)



4. ábra

$$\pi r^2(h_1 + h_2) - \frac{\pi}{3}(h_1^3 + h_2^3) = \frac{2\pi}{3}r^3.$$

A numerikus megoldáshoz érdemes bevezetni az $x_1 = \frac{h_1}{r}$ és $x_2 = \frac{h_2}{r}$ dimenziótlan változókat, így áttekinthetőbbé válik az egyenlet.

$$(3) \quad x_1^3 + x_2^3 - 3(x_1 + x_2) + 2 = 0.$$

Ez egy kétismeretlenes (harmadfokú) egyenlet. A másik egyenletet a fizikai feltétel matematikai megfogalmazásával kapjuk meg. Erre két lehetséges utat mutatunk meg.

I. megoldás. Az erőegyensúly alapján: a lapra kifejtett nyomóerő megegyezik a labdára ható felhajtóerővel.

$$(p - p_0)r_1^2\pi = \frac{2r^3\pi}{3}\rho g,$$

ahol p a labdában lévő nyomás, p_0 a külső légnyomás, r_1 a gömbövé felső lapjának sugara, ρ pedig a víz sűrűsége.

Ahogy a 3. ábrán is látható, a labda belsejében a levegő nyomása a külső légnyomás és a h magasságú vízoszlop hidrosztatikai nyomásának összegével egyenlő:

$$p = p_0 + \rho g h = p_0 + \rho g(h_1 + h_2).$$

Ezt beírva az előző egyenletbe, és kihasználva, hogy $r_1^2 = r^2 - h_1^2$, megkapjuk a fizikai feltételt:

$$\rho g(h_1 + h_2)(r^2 - h_1^2)\pi = \frac{2r^3\pi}{3}\rho g,$$

amelyet a korábban bevezetett dimenziótlan változókkal ismét áttekinthetőbb alakra hozhatunk:

$$(4) \quad (x_1 + x_2)(1 - x_1^2) = \frac{2}{3}.$$

Ezután a kétismeretlenes (3)–(4) egyenletrendszert kell megoldanunk.

Az egyenletrendszert legegyszerűbb numerikusan, „próbálgatással” megoldani. x_1 és x_2 értéke 0 és 1 között lehet, értéküket durván megbecsülve behelyettesíthetjük az egyenletekbe, majd az értékeket úgy finomítjuk, hogy az egyenletek minél inkább teljesüljenek. Az egyenletrendszer megoldása (itt 3 értékes jegyre, de természetesen a versenyen kevésbé pontos megoldás is elég lett volna) és az összenyomott labda 4. ábrán látható geometriai paraméterei:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,235, & x_2 &= 0,470, \\ h_1 &= 4,7 \text{ cm}, & h_2 &= 9,4 \text{ cm}, \\ h &= h_1 + h_2 = 14,1 \text{ cm}, \\ r_1 &= 19,4 \text{ cm}, & r_2 &= 17,6 \text{ cm}. \end{aligned}$$

II. megoldás. Energetikai megfontolás alapján: a kiszorított víz tömegközéppontja a lehető legmagasabban legyen.

A gömböv tömegközéppontjának távolsága a laptól (a gömböv tömegközéppontjának helye képletgyűjteményekből kikereshető, vagy integrálással könnyen meghatározható):

$$d = \frac{3(h_2^2 - h_1^2)}{4r} - \frac{3(h_2^4 - h_1^4)}{8r^3},$$

a korábbi módon dimenziótlanítva

$$\delta = \frac{d}{r} = \frac{3(x_2^2 - x_1^2)}{4} - \frac{3(x_2^4 - x_1^4)}{8}.$$

Ezután δ minimumát keressük, figyelembe véve a korábban felírt

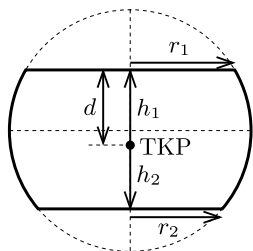
$$x_1^3 + x_2^3 - 3(x_1 + x_2) + 2 = 0$$

geometriai feltételt is.

Legegyszerűbben ismét „próbálgatással” oldhatjuk meg a feladatot. Eszerint

$$\delta_{\min} = 0,343, \quad \text{ha} \quad x_1 = 0,235 \quad \text{és} \quad x_2 = 0,470,$$

az előző megoldással összhangban.



5. ábra

A tömegközéppont minimális távolsága a laptól
 $d_{\min} = r\delta_{\min} = 6,9 \text{ cm}$.

Megjegyzés. Több versenyző is észrevette, hogy a feladat ekvivalens azzal, hogy a labdát félig megtöltjük vízzel, és egy sima, vízszintes felületre helyezzük. Ilyenkor értelemszerűen a víz tömegközéppontjának a lehető legalacsonyabban kell lennie.



Az ünnepélyes eredményhirdetésre és díjkiosztásra 2021. november 26-án délután került sor az ELTE TTK Eötvös-termében. Meghívást kaptak az 50 és 25 évvel ezelőtti Eötvös-verseny nyertesei is. A 25 évvel ezelőtti díjazottak közül *Tóth Gábor Zsolt* jött el – ő pár mondatban beszélt a pályafutásáról.

Ezután következett a 2021. évi verseny feladatainak és megoldásainak bemutatása. Az 1. feladat megoldását *Gnädig Péter*, a 2. feladatét *Széchenyi Gábor*, a 3. feladatét *Vankó Péter* ismertette.

Az esemény végén került sor az eredményhirdetésre. A díjakat *Ormos Pál*, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke adta át.

Egyetlen versenyző sem oldotta meg mindhárom feladatot, így a versenybizottság nem adott ki első díjat.

Az első feladat helyes megoldásáért, valamint a második és harmadik feladatban elért lényeges eredményekért *második díjat* nyert **Tóth Ábel**, az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumban érettségizett *Schramek Anikó* tanítványaként.

Az első feladat helyes, vagy lényegében helyes megoldásáért, valamint a második vagy a harmadik feladatban elért lényeges eredményekért *harmadik díjat* nyert **Kertész Balázs Zoltán**, a Debreceni Református Kollégium Dóczy Gimnáziumának 12. osztályos tanulója, *Tófalusi Péter* tanítványa; **Szépvölgyi Gergely**, a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Székely György* és *Rakovszky Andorás* tanítványa, valamint **Takács Bendegúz**, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Nagy Pirooska Mária* és *Csefkő Zoltán* tanítványa.

Az első feladat helyes, vagy lényegében helyes megoldásáért, valamint a második feladatban elért részeredményekért *dicséretet* kapott **Bonifert Balázs**, az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Diákotthonban érettségizett *Horváth Norbert* tanítványaként; **Csordás Kevin**, a Bajai III. Béla Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Lakner Attila* és *Pálfalvi László* tanítványa; **Dékány Csaba**, a győri Révai Miklós Gimnázium és Kollégium 12. osztályos tanulója, *Juhász Zoltán* tanítványa; **Fonyi Máté Sándor**, a BME fizika BSc szakos hallgatója, aki a szolnoki Vereseghy Ferenc Gimnáziumban érettségizett *Veres Dénes* tanítványaként; **Gurzó József**, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Nagy Pirooska Mária* tanítványa, valamint **Toronyi András**, a Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Diákotthon 12. osztályos tanulója, *Horváth Norbert* tanítványa.