

Beszámoló a 2019. évi Eötvös-versenyről

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2019. évi Eötvös-versenye október 11-én délután 3 órai kezdettel tizenkét magyarországi helyszínen¹ került megrendezésre. Ezért külön köszönettel tartozunk mindazoknak, akik ebben szervezéssel, felügyelettel a segítségünkre voltak. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc áll rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de (nem programozható) zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 56 versenyző adott be dolgozatot, 19 egyetemista és 37 középiskolás.

Ismertetjük a feladatokat és azok megoldását.

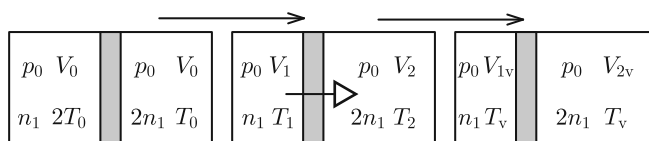
*

1. Egy könnyen mozgó dugattyú egy hőszigetelt, vízszintes tengelyű hengert kezdetben két azonos, V_0 térfogatú részre oszt. Mindkét részben p_0 nyomású, egyatomos ideális gáz van. A bal oldali részben a kezdeti hőmérséklet $2T_0$, míg a jobb oldali részben T_0 . A két részt elválasztó dugattyú mérsékelten hővezető, hőátadását az α paraméter jellemzi, azaz ΔT hőmérséklet-különbség esetén a dugattyún időegységenként átáramló hő $\propto \Delta T$.

- Mekkora lesz a két részben a gázok térfogata, hőmérséklete és nyomása hosszú idő elteltével?
- Adjuk meg az idő függvényében a két térrészben levő gáz $V_1(t)$ és $V_2(t)$ térfogatát!

(Tasnádi Tamás)

Megoldás. a) Amint a feladat szövege is mutatja, a kezdeti értékeket nulla indexszel, a bal oldali részt egyes, és a jobb oldali részt kettes indexszel jelöljük. A végső állapot mennyiségeit a „v” index mutatja. Az 1. ábra a folyamatot és az állapotjelzők értékeit foglalja össze.



1. ábra

Mivel mindkét részben egyatomos ideális gáz van, a szabadsági fok $f = 3$. A kezdeti állapotra felírt gáztörvényből,

$$p_0 V_0 = n_1 R 2T_0, \quad p_0 V_0 = n_2 R T_0,$$

megkapjuk, hogy a jobb oldalon a mólok száma kétszer annyi, mint a bal oldalon: $n_2 = 2n_1$.

A dugattyú hőátadása következtében a bal oldali gáz lassan lehűl, és a jobb oldali melegszik, miközben a dugattyú balra tolódik. A folyamat lassúsága következtében a dugattyú két oldalán a nyomásnak meg kell egyeznie, azaz $p_1 = p_2$. Továbbá a rendszerben az energia megmarad, tehát a belső energiák összege állandó:

$$\frac{f}{2} n_1 R 2T_0 + \frac{f}{2} 2n_1 R T_0 = \frac{f}{2} n_1 R T_1 + \frac{f}{2} 2n_1 R T_2,$$

amely egyszerűsítések után, és a gáztörvényt felhasználva:

$$p_0 V_0 + p_0 V_0 = p_1 V_1 + p_1 V_2.$$

A jobb és bal oldali térfogat összege nem változik, és így a fenti egyenletből következik, hogy a nyomás végig mindkét oldalon állandó marad, azaz

$$p_1 = p_2 = p_0,$$

és a folyamat izobár.

Most rátérünk a végső állapot meghatározására. Már tudjuk, hogy a végső nyomás megegyezik a kezdetivel. A dugattyún történő hőátadás következtében a végső hőmérséklet a két oldalon ugyanakkora. Az energiamegmaradás

$$\frac{f}{2} n_1 R 2T_0 + \frac{f}{2} 2n_1 R T_0 = \frac{f}{2} n_1 R T_v + \frac{f}{2} 2n_1 R T_v$$

egyenletéből

$$T_v = \frac{4}{3} T_0.$$

Gay-Lussac első törvényéből

$$V_{1v} = \frac{2}{3} V_0 \quad \text{és} \quad V_{2v} = \frac{4}{3} V_0.$$

¹Részletek a verseny honlapján: <http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm>

b) Most térjünk rá a folyamat vizsgálatára. A bal oldali rész lehűl, a jobb oldali melegszik, azaz a bal oldal Δt idő alatt bekövetkező kicsiny ΔT_1 hőmérséklet-változása negatív, míg a jobb oldalra $\Delta T_2 > 0$. A folyamat izobár, ezért a bal és jobb oldal egyenlete:

$$\frac{f+2}{2}n_1R\Delta T_1 = \alpha(T_2 - T_1)\Delta t, \quad \text{illetve} \quad \frac{f+2}{2}2n_1R\Delta T_2 = \alpha(T_1 - T_2)\Delta t.$$

Ezek az egyenletek az

$$\frac{f+2}{2}n_1R\frac{dT_1}{dt} = \alpha(T_2 - T_1), \quad \text{illetve} \quad \frac{f+2}{2}2n_1R\frac{dT_2}{dt} = \alpha(T_1 - T_2)$$

differenciálegyenleteknek felelnek meg. Ezekből kifejezve a dT_1/dt és dT_2/dt hányadosokat, valamint bevezetve a $\Delta T = T_1 - T_2$ hőmérséklet-különbséget

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -\frac{3\alpha}{(f+2)n_1R}\Delta T \quad \text{és} \quad \frac{d(T_1 + 2T_2)}{dt} = 0.$$

A második egyenletben a differenciálandó mennyiség nem változik, és kezdeti értékét ismerjük, tehát

$$T_1 + 2T_2 = 4T_0.$$

Az első egyenletben található állandó a hőátadási folyamat lecsengési együtthatója:

$$\lambda = \frac{3\alpha}{(f+2)n_1R} = \frac{6\alpha T_0}{5p_0V_0}.$$

A fentihez hasonló differenciálegyenlet a tudományokban számos helyen előfordul. Ezek közül a legismertebb a radioaktív bomlás, amelynek a megoldása a λ állandóval lecsengő exponenciális függvény. Mivel ismerjük ennek a függvénynek a kezdeti értékét, ennél fogva

$$\Delta T = T_0 e^{-\lambda t},$$

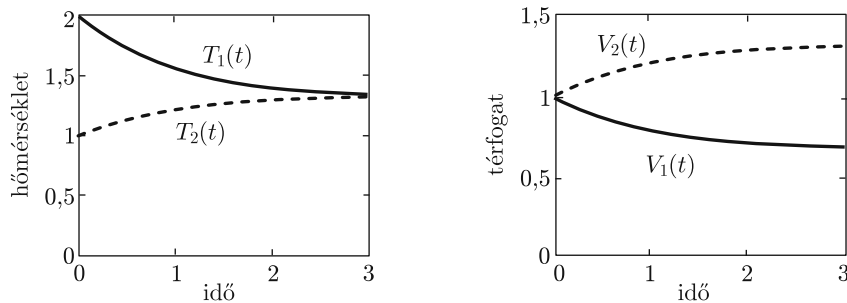
és így

$$T_1(t) = \frac{4}{3}T_0 + \frac{2}{3}T_0 e^{-\lambda t}, \quad T_2(t) = \frac{4}{3}T_0 - \frac{1}{3}T_0 e^{-\lambda t}.$$

A térfogatok változását most is Gay-Lussac első törvénye adja:

$$V_1(t) = \frac{2}{3}V_0 + \frac{1}{3}V_0 e^{-\lambda t}, \quad V_2(t) = \frac{4}{3}V_0 - \frac{1}{3}V_0 e^{-\lambda t}.$$

Ezeket a függvényeket a 2. ábra grafikonjain is bemutatjuk, ahol a hőmérsékletet T_0 , a térfogatot V_0 , az időt pedig $1/\lambda$ egységekben mértük.



2. ábra

2. Egy a oldalélű kocka minden éle egyforma, R ellenállású huzalból készült. A kocka homogén, kezdetben B_0 indukciójú mágneses mezőbe merül, amit τ idő alatt egyenletesen nullára csökkentünk. Mekkora a folyamat közben keletkező Joule-hő, ha a mágneses indukcióvektor a kocka egy csúcsban találkozó éleivel rendre α , β és γ hegyesszöget zár be? ($\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.)

(Vigh Máté)

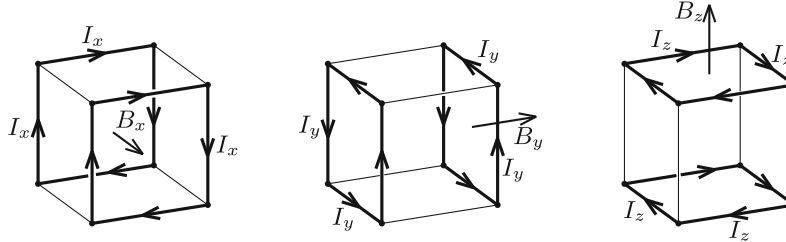
Megoldás. Képzeljük el egy pillanatra, hogy a mágneses térnek csak az x irányú, időben

$$B_x(t) = B_{x,0}(1 - t/\tau)$$

szerint változó komponense létezik, a másik két komponens pedig zérus! Ekkor a szimmetria miatt a 3. ábra bal szélén látható árameloszlás jönne létre. A kocka 8 élében folyó, egyforma nagyságú I_x áramokat a Faraday-féle indukciótörvényből lehet meghatározni:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} \longrightarrow 4RI_x = a^2 \frac{B_{x,0}}{\tau},$$

ahol felhasználtuk, hogy a mágneses tér irányára merőleges lapokon átmenő, kezdeti $a^2 B_{x,0}$ nagyságú fluxus τ idő alatt csökken nullára.



3. ábra

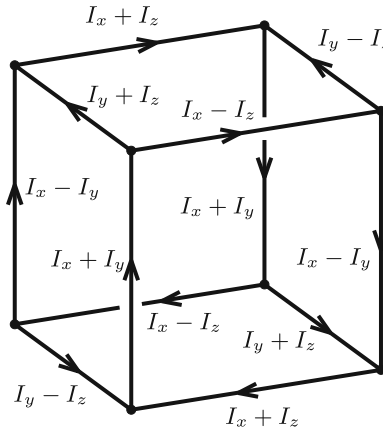
Hasonlóan kapjuk az élekben folyó áramerősségeket azokra az elképzelt esetekre, melyekben a mágneses mezőnek csak az y - vagy z -komponense van jelen (3. ábra középső és jobb szélső rajza):

$$I_x = \frac{a^2}{4R} \frac{B_{x,0}}{\tau}, \quad I_y = \frac{a^2}{4R} \frac{B_{y,0}}{\tau}, \quad I_z = \frac{a^2}{4R} \frac{B_{z,0}}{\tau}.$$

Ha a mágneses térnek mindhárom komponense jelen van, akkor a kialakuló feszültség- és árameloszlást a fenti három eset szuperpozíciójaként kapjuk, ezt mutatja a 4. ábra.

A teljes Joule-hő teljesítménye az időben állandó erősségű áramok miatt konstans, nagysága pedig az egyes élekben disszipálódó RI^2 teljesítmények összege:

$$\begin{aligned} P = & 2R(I_x + I_y)^2 + 2R(I_x - I_y)^2 + \\ & + 2R(I_y + I_z)^2 + 2R(I_y - I_z)^2 + \\ & + 2R(I_x + I_z)^2 + 2R(I_x - I_z)^2. \end{aligned}$$



4. ábra

Ha a zárójeleket felbontjuk, az $(I_x + I_y)^2 + (I_x - I_y)^2 = 2I_x^2 + 2I_y^2$ összefüggés miatt a teljesítmény az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$P = 8R(I_x^2 + I_y^2 + I_z^2).$$

A keletkező Joule-hőt az előbb kiszámított teljesítmény és a τ idő szorzataként számolhatjuk. Az I_x , I_y , I_z áramerősségekre korábban levezetett eredmények felhasználásával kapjuk a következőt:

$$Q = P\tau = \frac{a^4}{2R} \frac{B_{x,0}^2 + B_{y,0}^2 + B_{z,0}^2}{\tau} = \frac{a^4}{2R} \frac{B_0^2}{\tau}.$$

Azt az érdekes eredményt kaptuk, hogy a Joule-hő *független* a mágneses tér irányától, csupán annak nagyságától függ. A feladatban megadott α , β és γ szögekre tehát nem is volt szükség!

3. Egy nagyon hosszú kötelet vízszintes helyzetben, a súlyánál sokkal nagyobb F_0 erővel megfeszítünk. A kötélt a pozitív x tengelyen helyezkedik el, egyik vége pedig az origóban van.

a) Ha a kötélt origóban lévő végét A amplitúdójú, f frekvenciájú harmonikus rezgőmozgással az x tengelyre merőleges, vízszintes y irányban mozgatjuk, a kötéltben transzverzális hullámok jönnek létre, amelyek (a kötélt hosszegységre eső tömegétől és a feszítettségétől függő) c sebességgel terjednek. (A hullámok amplitúdója kicsi, vagyis $A \ll c/f$.) Adjuk meg a kötélt x koordinátájú pontjának t időpillanatbeli $y(x, t)$ kitérését!

b) Mekkora átlagos teljesítmény szükséges a kötélt végének mozgatásához?

c) Most a kötélt origóban lévő vége y irányban szabadon elmozdulhat, de mozgását a kötélt végének $v(t)$ sebességével arányos, $-\gamma v(t)$ erő fékezi. A kötélen egy A amplitúdójú szinuszhullám érkezik az origó felé. Azt tapasztaljuk, hogy a hullám részben vagy esetleg teljesen visszaverődik, melynek következtében egy, az origótól távolodó, B amplitúdójú szinuszhullám is kialakul.

Mekkora a visszavert hullám amplitúdója? Adjuk meg a B/A arányt! Vizsgáljuk a $\gamma \rightarrow \infty$ és $\gamma \rightarrow 0$ (nagyon erős és nagyon gyenge csillapítás) eseteket! Van-e olyan γ csillapítási tényező, amelynél egyáltalán nem verődik vissza hullám a kötélt végétől?

(Gnädig Péter)

Megoldás. a) A kötélt végpontjának rezgőmozgását az

$$y(t) = A \sin(2\pi f t + \varphi_0)$$

függvénnyel írhatjuk le, ahol φ_0 a rezgés fázisa a 0 időpillanatban, amely az időmérés kezdetének megfelelő megválasztásával nulla lehet.

A rezgés c sebességgel terjed az x tengely mentén, x távolságra $\frac{x}{c}$ idő alatt ér el. Így az x koordinátájú pontban a kitérés akkora, mint az origóban $\frac{x}{c}$ idővel korábban volt. Ez alapján a keresett hullámfüggvény:

$$y(x, t) = A \sin \left[2\pi f \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] = A \sin \left(2\pi f t - \frac{2\pi f}{c} x \right).$$

b) A kötélt alakját egy rögzített $t = t_1$ pillanatban az

$$y(x) = y(x, t = t_1) = A \sin \left(2\pi f t_1 - \frac{2\pi f}{c} x \right)$$

egyváltozós függvény adja meg, ahol $2\pi f t_1$ egy konstans.

Bármely x pontban a kötélt x tengellyel bezárt szögének tangense éppen ennek a függvénynek a meredeksége, amit legegyszerűbben (az x változó szerinti) deriválással határozhatunk meg:

$$\operatorname{tg} \alpha(x, t = t_1) = \frac{dy}{dx} = -A \frac{2\pi f}{c} \cos \left(2\pi f t_1 - \frac{2\pi f}{c} x \right).$$

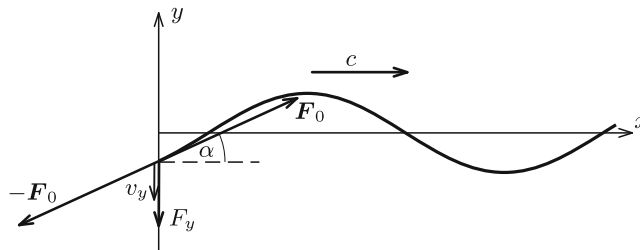
A kötélt alakja azonban változik az idővel, így egy adott ponton a meredekség (és az α szög is) az idő függvénye lesz. Az origóban (az $x = 0$ helyen) a kötélt iránytangense eszerint:

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \operatorname{tg} \alpha(x = 0, t) = -A \frac{2\pi f}{c} \cos \left(2\pi f t - \frac{2\pi f}{c} 0 \right) = -A \frac{2\pi f}{c} \cos(2\pi f t).$$

A kötélt mozgatásához szükséges (időben változó) pillanatnyi teljesítményt a

$$P(t) = F_y(t) v_y(t)$$

szorzat határozza meg, ahol $F_y(t)$ az általunk a kötélt végére kifejtett y -irányú erő, $v_y(t)$ pedig a kötélt origóban lévő végének (y -irányú) sebessége (5. ábra).



5. ábra

Az y -irányú erő (felhasználva, hogy $\alpha \ll 1$):

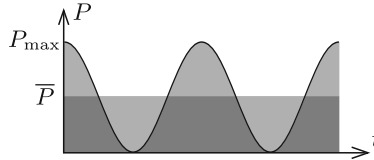
$$F_y = -F_0 \sin \alpha \approx -F_0 \operatorname{tg} \alpha = F_0 A \frac{2\pi f}{c} \cos(2\pi f t).$$

A köté végének sebessége a rezgőmozgását leíró $y(t) = y(x = 0, t)$ egyváltozós függvény (t szerinti, jól ismert) deriváltja:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 2\pi f A \cos(2\pi f t).$$

A pillanatnyi teljesítmény ezek alapján:

$$P(t) = F_y(t)v_y(t) = \frac{4\pi^2 f^2 A^2 F_0}{c} \cos^2(2\pi f t).$$



6. ábra

A keresett átlagos teljesítmény – a $\cos^2(2\pi f t)$ függvény 6. ábráról leolvasható, jól ismert átlagértéke alapján – a maximális teljesítmény fele:

$$\bar{P} = \frac{P_{\max}}{2} = \frac{2\pi^2 f^2 A^2 F_0}{c}.$$

c) Ebben a részben az origó felé érkezik egy hullám. Ennek hullámfüggvénye az ellenkező irányú terjedés miatt:

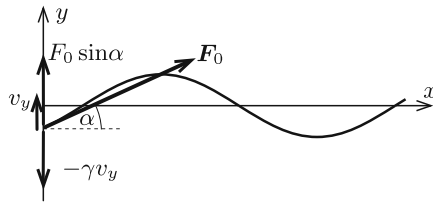
$$y_{\leftarrow}(x, t) = A \sin\left(2\pi f t + \frac{2\pi f}{c} x\right).$$

A visszaverődő hullám ismét a pozitív irányban halad:

$$y_{\rightarrow}(x, t) = B \sin\left(2\pi f t - \frac{2\pi f}{c} x + \varphi\right),$$

itt fel kell vennünk egy egyelőre ismeretlen φ fáziskülönbséget is. A kötélen kialakuló hullám ennek a két hullámnak a szuperpozíciója:

$$y(x, t) = y_{\leftarrow}(x, t) + y_{\rightarrow}(x, t).$$



7. ábra

A köté vége y irányban szabadon mozoghat, így a rá ható y -irányú erők eredőjének minden pillanatban nullának kell lennie:

$$F_0 \sin \alpha - \gamma v_y \approx F_0 \frac{dy}{dx} - \gamma \frac{dy}{dt} = 0.$$

A hullámfüggvény és a deriváltak:

$$\begin{aligned} y &= y_{\leftarrow} + y_{\rightarrow} = A \sin\left(2\pi f t + \frac{2\pi f}{c} x\right) + B \sin\left(2\pi f t - \frac{2\pi f}{c} x + \varphi\right), \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2\pi f}{c} A \cos\left(2\pi f t + \frac{2\pi f}{c} x\right) - \frac{2\pi f}{c} B \cos\left(2\pi f t - \frac{2\pi f}{c} x + \varphi\right), \\ \frac{dy}{dt} &= 2\pi f A \cos\left(2\pi f t + \frac{2\pi f}{c} x\right) + 2\pi f B \cos\left(2\pi f t - \frac{2\pi f}{c} x + \varphi\right). \end{aligned}$$

Ezeket behelyettesítve az erőegyensúly képletébe, és rendezve:

$$\begin{aligned} F_0 \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} &= \gamma \frac{dy}{dt} \Big|_{x=0}, \\ F_0 \frac{2\pi f}{c} A \cos(2\pi ft) - F_0 \frac{2\pi f}{c} B \cos(2\pi ft + \varphi) &= \\ &= \gamma 2\pi f A \cos(2\pi ft) + \gamma 2\pi f B \cos(2\pi ft + \varphi), \\ F_0 A \cos(2\pi ft) - F_0 B \cos(2\pi ft) \cos \varphi + F_0 B \sin(2\pi ft) \sin \varphi &= \\ \gamma c A \cos(2\pi ft) + \gamma c B \cos(2\pi ft) \cos \varphi - \gamma c B \sin(2\pi ft) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Ezeknek az egyenleteknek minden időpontban teljesülnie kell, így a $\cos(2\pi ft)$ -s és a $\sin(2\pi ft)$ -s tagokra külön-külön is:

$$\begin{aligned} F_0 A - F_0 B \cos \varphi &= \gamma c A + \gamma c B \cos \varphi, \\ F_0 B \sin \varphi &= -\gamma c B \sin \varphi. \end{aligned}$$

A második egyenlet alapján $\sin \varphi = 0$, $\varphi = 0$ (vagy $\varphi = \pi$) és így $\cos \varphi = 1$ (vagy $\cos \varphi = -1$). Ezt felhasználva az első egyenlet alapján:

$$B = \frac{F_0 - \gamma c}{F_0 + \gamma c} A.$$

Ha $\gamma \rightarrow \infty$ (rögzítjük a kötéel végét), akkor $B = -A$, tehát a hullám azonos amplitúdóval, de ellentétes fázisban (π fázisugrással) verődik vissza.

Ha $\gamma \rightarrow 0$ (a kötéel vége teljesen szabadon mozog), akkor $B = A$, azaz a hullám szintén azonos amplitúdóval, de most azonos fázisban verődik vissza.

$B = 0$ -t akkor kapunk, ha $\gamma = F_0/c$, ilyenkor tehát egyáltalán nincs visszaverődés.

Megjegyzés. A b) és c) kérdésekre válaszolhatunk energetikai megfontolásokkal is. Ehhez a hullám – mozgási és rugalmas helyzeti energiából származó – energiasűrűségét kell meghatározni.

*

Az ünnepélyes eredményhirdetésre és díjkiosztásra 2019. november 22-én délután került sor az ELTE TTK Konferenciatermében. Jelen volt a 70 évvel ezelőtti, háború utáni első Eötvös-verseny győztese, *Holics László*, aki pár szóban visszaemlékezett erre a versenyre. Meghívást kaptak az 50 és 25 évvel ezelőtti Eötvös-verseny nyertesei is. Az 50 évvel ezelőtti díjazottak közül *Láz József* volt jelen, a 25 évvel ezelőtti díjazottak közül pedig *Horváth Péter*, *Kovács Krisztián*, *Tóth Gábor Zsolt* és *Varga Dezső* jött el – ők pár mondatban beszéltek a pályafutásukról.

Ezután következett a 2019. évi verseny feladatainak és megoldásainak bemutatása. Az 1. feladat megoldását Tichy Géza, a 2. feladatét Vigh Máté, a 3. feladatét Vankó Péter ismertette.

Az esemény végén került sor az eredményhirdetésre. A díjakat *Sólyom Jenő*, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke adta át.

Mindhárom feladat helyes megoldásáért I. díjban részesült **Elek Péter**, a BME fizika BSc. szakos hallgatója, a Debreceni Református Kollégium Dóczy Gimnáziumának érettségizett tanulója, *Tófalusi Péter* tanítványa.

Két feladat hibátlan megoldásáért, illetve mindhárom feladat kisebb hibákkal való megoldásáért II. díjban részesült **Bokor Endre**, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Schramek Anikó* tanítványa, **Fajszai Bulcsú**, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa, valamint **Fitos Bence**, a BME fizika BSc. szakos hallgatója, a Budapesti Németh László Gimnázium érettségizett tanulója, *Szászvári Irén* és *Dégen Csaba* tanítványa.

Két feladat lényegében helyes megoldásáért III. díjban részesült **Csepányi István**, a BME fizika BSc. szakos hallgatója, az Egri Szilágyi Erzsébet Gimnázium érettségizett tanulója, *Szabó Miklós* tanítványa, **Máth Benedek Huba**, a BME fizika BSc. szakos hallgatója, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója, *Horváth Gábor* és *Nagy Piroska Mária* tanítványa, **Olosz Adél**, a BME építőmérnöki BSc. szakos hallgatója, a PTE Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója, *Koncz Károly* tanítványa, valamint **Svastits Domonkos**, a BME fizika BSc. szakos hallgatója, a budapesti Piarista Gimnázium érettségizett tanulója, *Chikán Éva* tanítványa.

Egy feladat hibátlan megoldásáért dicséretben részesült **Kondákor Márk**, a BME fizika BSc. szakos hallgatója, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója, *Horváth Gábor* és *Nagy Piroska Mária* tanítványa, **Magyar Róbert Attila**, a BME fizika BSc. szakos hallgatója, az Egri Dobó István Gimnázium érettségizett tanulója, *Hóbor Sándor* tanítványa, valamint **Pácsonyi Péter**, a Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Pálovics Róbert* tanítványa.

Az első díjjal a verseny plakettjén kívül az NKFI Hivatal által nyújtott támogatásból 70 ezer, a második díjjal 50 ezer, a harmadik díjjal 30 ezer, a dicsérettel 20 ezer forint pénzjutalom járt, a díjazottak tanárai és az országos verseny szervezői pedig a *Typotex Kiadó* könyveit kapták. A verseny megszervezését az Eötvös Loránd Fizikai Társulat ebben az évben szintén az NKFI Hivatal által az *Eötvös 100 emlékévként* alkalmából nyújtott támogatásból fedezte.

Tichy Géza, Vankó Péter, Vigh Máté