

1999. október 15-én rendezte meg az Eötvös Loránd Fizikai Társulat hagyományos őszi tanulóversenyét, az Eötvös-versenyt, melyen 156 hazai, 3 szlovákiai és 1 romániai versenyző indult. Az első feladatot 15 versenyző tudta hibátlanul megoldani, a másodikat 40, a harmadikra azonban csupán egy tökéletes megoldás érkezett. Részben jó megoldás elég sok volt.

Ismertetjük a feladatokat, azok helyes megoldását, végül a verseny végeredményét.

1. Egy szuperszonikus vadászgép 900 m magasan repül el felettünk, vízszintes irányban. 1 km messze van tőlünk, amikor először meghalljuk a hangját. Milyen irányból halljuk a repülőgép hangját akkor, amikor már 2 km messze van tőlünk a gép?

(Radnai Gyula)

Megoldás. Az 1. ábrán az M megfigyelő fölött elhaladó repülőgépből egyenlő időközönként kibocsátott hanghullámokat ábrázoltuk.

A szuperszonikus repülőgép sebessége nagyobb, mint a hang sebessége a levegőben. Jól látszik, hogy a repülőgép már elhaladt a megfigyelő felett, de a hangja még nem ért el a megfigyelőhöz. Az 1. ábrán a repülőgép éppen a D pontban van, ez előtt τ idővel volt a C pontban, 2τ idővel előtte a B pontban, 3τ idővel előtte az A pontban. $AB = BC = CD = v\tau$ (v a repülőgép sebessége). Természetesen a közbülső pontokban is bocsát ki hangot a repülőgép, az áttekinthetőség kedvéért ezeket nem tüntettük fel.

Akármeekkora τ időközöt választhatunk az ábrázolásra, most azonban éppen akkorát választottunk, hogy az 1. ábrán ábrázolt helyzethez képest pontosan 2τ idő múlva érjen el az M megfigyelőhöz a repülőgép hangja; ezt mutatja a 2. ábra. Itt a repülőgép már az F pontban van, s a C pontból indult hanghullám éppen M -be ért. (A többi pontból jövő hang még nem érte el M -et.)

Mivel $\overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{FM}$, a CMF háromszög derékszögű. Ameddig a gép megtette a CF utat, addig a hang a CM távolságot futotta be. (Ábránkon ez az idő 3τ .) Az összes pontból jövő hanghullám eredője az a kúp alakú „fejhullám-felület”, amelynek egyik alkotója a 2. ábrán az FM egyenes. E kúp fél nyílásszöge az ún. Mach-szög, amelyre

$$\sin \varphi = \frac{c}{v}$$

(c a hangsebesség, $v \geq c$). Ennek az általánosan érvényes összefüggésnek a felhasználásával fogjuk megoldani a feladatot.

Tekintsük a 3. ábrát, melyen a balról jobbra haladó repülőgép az F pontban van, amikor először jut el a hangja az M pontba. Az ábrából leolvasható, hogy a Mach-szögre (a megadott adatok felhasználásával)

$$\sin \varphi = \frac{0,9 \text{ km}}{1 \text{ km}} = 0,9,$$

$$\varphi = 64,16^\circ.$$

ahonnan

Abban a pillanatban, amikor a repülőgép az M megfigyelőtől 2 km távol lévő R pontban van, a megfigyelő azt a hangot hallja, amit a gép egy korábbi időpontban adott ki. Ahol ekkor volt a repülőgép, azt a pontot jelöljük P -vel. Feladatunk tehát az MP irány meghatározása. Kérdezhetjük például azt, hogy ez az irány mekkora szöggel marad le az MR iránytól, vagyis hány fokkal hátrábbról halljuk a hangot, mint ahol látjuk a gépet. Ezt a szöget (melyet a 3. ábrán μ -vel jelöltünk) az MPR $\triangle$ -ből a szinusztétel segítségével határozhatjuk meg:

$$\frac{\sin \varrho}{\sin \mu} = \frac{PM}{PR}.$$

Mivel $\sin \varrho = \frac{0,9 \text{ km}}{2 \text{ km}} = 0,45$ (ahonnan $\varrho = 26,74^\circ$), valamint

$$\frac{PM}{PR} = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v} = \sin \varphi = 0,9,$$

ezért

$$\sin \mu = \frac{0,45}{0,9} = \frac{1}{2}, \quad \text{azaz} \quad \mu_1 = 30^\circ, \quad \text{illetve} \quad \mu_2 = 150^\circ.$$

Meglepőnek tűnhet, hogy a μ szögre két érték is adódott, pedig csak egy hegyesszögre számítottunk. Vajon a tompaszög is megoldása az eredeti fizikai problémának? Bizony az! Már a 2. ábrából is látszik, hogy ha a repülőgép túlhaladt az F ponton, akkor nemcsak a C pont utáni helyekről (pl. D -ből és E -ből) induló hullámok érik el fokozatosan az M pontot, hanem egyidejűleg azok a hullámok is odaérnek, amelyeket még a C pontba érkezése előtt bocsátott ki a gép (pl. B -ből, A -ból). Egy ilyen helyzetet mutat a 4. ábra, ahol éppen a B és a D pontok közeléből indult hullámok érik el egyszerre M -et. (A C -ből indult hullám már túlhaladt M -en). Az első „hangrobbanás” után tehát mindig két irányból halljuk a repülőgép hangját, igaz, általában az „előlről” jövőt halljuk erősebben.

Megjegyzés. A megoldók a hallott hang MP irányának meghatározásakor általában a vízszintes vagy függőleges iránnyal bezárt szögeket adták meg. A helyes eredmények a vízszintessel bezárt szögekre: $\mu_1 + \varrho = 56,74^\circ$, illetve $180^\circ - (\mu_2 + \varrho) = 3,26^\circ$; a függőlegessel bezárt szögek pedig: $90^\circ - (\mu_1 + \varrho) = 33,26^\circ$ és $\mu_2 + \varrho - 90^\circ = 86,74^\circ$.

2. Két egyébként egyforma lombik közül az egyiknek a nyaka egyenes, a másiké lefele görbül, az *5. ábra* szerint. A két lombikba azonos mennyiségű

- A) vizet,
- B) étert

töltünk, és gondoskodunk róla, hogy mindkét lombikban a folyadék hőmérséklete

az A) esetben $100\text{ }^{\circ}\text{C}$,

a B) esetben $34,6\text{ }^{\circ}\text{C}$

legyen. Melyik lombikból fog el hamarabb a folyadék az egyik, illetve a másik esetben?

(Károlyházy Frigyes)

Megoldás. A megadott $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ a víz, $34,6\text{ }^{\circ}\text{C}$ pedig az éter normál nyomás melletti forráspontja. A víz móltömege 18 g/mol , az éter $[(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}]$ móltömege 74 g/mol . Igaz, a forráspont környékén egyetlen reális gáz sem viselkedik ideális gázként, az mégis joggal feltételezhető, hogy a vízgőz sűrűsége kisebb, az étergőz sűrűsége pedig nagyobb marad a levegő sűrűségénél. (A vízgőz „könnyebb”, az étergőz „nehezebb” a levegőnél.)

Tekintsük először az A) esetet, amikor mindkét lombikba vizet töltöttünk. Ekkor az egyenes nyakú lombikban képződő vízgőz előbb-utóbb betölti a lombik nyakát, azonban nem maradhat stabilan a nála „nehezebb” levegő alatt, hanem felszáll, helyet adva a levegőnek, valamint az újabb és újabb vízgőzképződésnek; így a víz hamarosan elforr.

A görbe nyakú lombik nyakát is betölti a vízgőz, innen azonban csak „lefele” tudna kiszabadulni, miközben a sűrűbb levegőnek kellene felfelé, a vízgőz helyére áramlania. Ez nem történik meg olyan hevességgel, mint az egyenes nyakú lombiknál, mert most csak diffúzióval tud eltávozni a vízgőz, ami viszont lassú folyamat. Az A) esetben tehát a vízgőz az egyenes nyakú csőből szabadul ki gyorsabban, vagyis ebből a lombikból forr el hamarabb a víz.

Nyilvánvaló, hogy a B) esetben, amikor a forráspontján tartott éter van a lombikokban, a helyzet éppen fordított. Az egyenes nyakú lombik nyakában megül az étergőz, nem fog felszállni a nála kisebb sűrűségű levegőbe. A nyak felső végénél diffundálnak az étermolekulák a levegőbe, ezért csak hosszú idő alatt forr el és távozik az éter a lombikból.

A lefele görbülő nyakú lombik nyakából viszont „kifolyik” a nehéz étergőz a levegőbe, helyére nemcsak levegő, hanem a lombikból újabb étergőz áramlik, gyorsítva ezzel az éter elforrását.

3. Hosszú, keskeny, függőleges üvegcsövet egy vele azonos tengelyű, de sokkal szélesebb, r külső sugarú másik üvegcső vesz körül. E szélesebb csővön sűrűn, egymástól h távolságra elhelyezkedő, R ellenállású körvezetők vannak.

Ha a keskeny csőbe egy m tömegű, d erősségű (mágneses dipólnyomatékú) kicsiny rúd-mágneset ejtünk, az viszonylag hamar elér egy állandó v_0 sebességet, amellyel egyenletesen süllyed. (*6. ábra.*)

További kísérleteink során a fenti öt mennyiség (m , d , h , R , r) közül az egyiket mindig a *kétszeresére* növeljük, miközben a másik négyet nem változtatjuk meg. *Hányszorosára* nő az egyes esetekben a kicsiny rúd-mágnes állandósult végsebessége?

Az eredeti eset: m, d, h, R, r ; ekkor $v = v_0$.

a) $(2m, d, h, R, r)$; $v_a/v_0 = ?$

b) $(m, 2d, h, R, r)$; $v_b/v_0 = ?$

c) $(m, d, 2h, R, r)$; $v_c/v_0 = ?$

d) $(m, d, h, 2R, r)$; $v_d/v_0 = ?$

e) $(m, d, h, R, 2r)$; $v_e/v_0 = ?$

A mechanikai sűrűlódástól és a közegellenállástól, továbbá a körvezetők önindukciójától és kölcsönös indukciójától eltekinthetünk.

(Gnädig Péter)

Megoldás¹. Számítsuk ki, mennyi energia disszipálódik (mennyi Q hő fejlődik) *egyetlen* körvezetőben, miközben a mágnes keresztülesik rajta. Kétféleképpen is következtethetünk erre a Q mennyiségre: egyrészt az energiaviszonyok összevetéséből, másrészt dimenzionális megfontolásokból.

Ha az m tömegű mágnes egyenletesen mozog függőlegesen lefelé a csőben és L utat tesz meg, helyzeti energiája mgL értékkel csökken. Eközben áthalad L/h darab körvezetőn, mindegyikben Q hőt fejleszt, és mivel a mágnes mozgási energiája nem változik, fenn kell álljon, hogy

$$mgL = QL/h, \quad \text{azaz} \quad Q = mgh.$$

Milyen fizikai mennyiségektől és milyen módon függhet Q ? Nyilván függ a hőfejlődés a kicsiny mágnes jellemzőitől (a d dipólnyomatéktól és a v sebességtől), továbbá a körvezető adataitól (az r sugártól és a vezető R elektromos ellenállásától):

$$Q = F(d, v, r, R),$$

ahol F valamilyen négyváltozós függvény, melynek pontos (vagy legalább arányossági tényezők erejéig határozott) alakja megadná a feladat valamennyi kérdésére a választ.

Ha dimenzionális megfontolásokkal akarjuk „kitalálni”, hogyan függ $F(d, v, r, R)$ az egyes változóitól, nem szabad megfedkezünk arról, hogy Q a felsorolt mennyiségek mellett függhet még μ_0 -tól (a vákuum permeabilitásától), ami

¹ Terpai Tamás dolgozata alapján

ugyan nem változó, hanem egy meghatározott mértékegységű és nagyságú mennyiség, de a hőfejlődés képletében (lévén az mágnességgel kapcsolatos folyamatok eredménye) ez a fizikai állandó is felbukkanhat. A keresett összefüggés tehát

$$Q = G(d, v, r, R, \mu_0),$$

alakú, ahol G egy ötváltozós függvény, melyet azonban az SI itt előforduló *négy* alaplómértékegységének (kg, m, s, A) vizsgálatából nem lehet meghatározni.

A feladat mégis megoldható a dimenzióanalízis módszerével, ugyanis a hőfejlődés és az R ellenállás közötti összefüggés (a többi adat rögzített értéke mellett) fordított arányosság kell legyen (azaz $Q \propto 1/R$), hiszen az áram hőhatása (adott módon változó indukált feszültség mellett) az ellenállás reciprokával arányos. Mondhatjuk tehát, hogy

$$Q \propto \frac{1}{R} f(d, v, r, \mu_0),$$

ahol $f(d, v, r, \mu_0)$ már csak 4 fizikai mennyiségtől függ.

Írjuk fel az egyes fizikai mennyiségek mértékegységét:

$$[Q] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}, \quad [1/R] = \frac{\text{s}^3 \text{ A}^2}{\text{kg m}^2} \quad [v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad [d] = \text{A m}^2, \quad [r] = \text{m}, \quad [\mu_0] = \frac{\text{kg m}}{\text{A}^2 \text{ s}^2}.$$

Ha a keresett f függvényt hatványfüggvény alakban próbáljuk felírni²:

$$h(d, v, r, \mu_0) \propto d^\alpha \cdot v^\beta \cdot r^\gamma \cdot \mu_0^\delta,$$

akkor a 4 független mértékegység hatványainak összehasonlításából a kitevőkre

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -3, \quad \delta = 2$$

adódik. Ezek szerint

$$Q = mgh \propto \frac{(\mu_0 d)^2 v}{R r^3},$$

vagyis a mágnes esési sebességének és a többi paraméternek a kapcsolata:

$$v \propto \frac{mhRr^3}{d^2}.$$

Ez a formula a feladat valamennyi kérdésére megadja választ: akár a tömeget, akár a menettávolságot, vagy a körvezetők elektromos ellenállását növeljük az eredeti érték kétszeresére, a mágnes esési sebessége 2-szer nagyobb lesz. Kétszer erősebb mágnes az eredetinel 4-szer lassabban fog mozogni, végül pedig a körvezetők sugarának kétszerezése a sebességet az eredeti érték 8-szorosára növeli.

★

Az eredményhirdetésre és az ünnepélyes díjkiosztásra az ELTE új, légymányosi épületének egyik nagyobb előadótermében került sor 1999. november 19-én. Itt először a Versenybizottság elnöke megemlékezett Sztrókay Pálról (1899–1965) és Náray-Szabó Istvánról (1899–1972), akik éppen száz évvel ezelőtt születtek, s az 1917. évi tanulóversenyen az 1. és 2. díjat nyerték. Sztrókay Pál Kossuth-díjas mérnök lett, a Ganznál a villamos vontatás fejlesztésén dolgozott, Kandó Kálmán utáni második emberként. Náray-Szabó István nemzetközi tekintélyű vegyészprofesszor lett, a fizika és a kémia határterületén alkotott: röntgendiffrakcióval kutatta az anyag kémiai-fizikai szerkezetét.

A rövid megemlékezések után került sor idej feladatok megoldásának diszkussziójára. Az első feladat megoldását Radnai Gyula, a másodikat az egyik versenyző (Tóth Bálint), a harmadikat Gnädig Péter mutatta be. A harmadik feladathoz kapcsolódóan, azt modellezve kísérleteket is láthattak a megjelentek: más-más falvastagságú, más-más fémből készült csöveknél különböző erősségű rúd-mágnesek esési idejét figyelhették meg, s így összehasonlíthatták különböző körülmények között kialakuló örvényáramok fékező hatását.

Az ünnepélyes eredményhirdetésen Fehér István, az ELFT alelnöke adta át (a feladatok kitűzőiből álló) Versenybizottság által odaítélt díjakat. A Társulat által biztosított pénzjutalmak mellett a Nemzeti Tankönyvkiadótól könyvtalványokat kaptak a díjazott versenyzők, akiknek jelen levő tanárai a Műszaki Kiadó és a Tankönyvkiadó ajándék-könyveiből válogathattak. Sajnos nem mindenki tudott eljönni: az éppen a díjkiosztás napján kitört hóvihár miatt maradt le az ünnepségről néhány régi Eötvös-verseny nyertes is.

²Belátható, hogy ezt az általánosság megszorítása nélkül megtehetjük.



7. ábra

Az 1999. évi Eötvös-verseny díjazottjai (fentről lefelé, balról jobbra): Péterfalvi Csaba Géza, Terpai Tamás, Gáspár Merse Előd, Buruzs Ádám, Katona Gergely, Csillag Kristóf, Hegedűs Ákos, Patay Gergely, Tóth Bálint, Pesti Gábor és Czigler István.

A mostani verseny eredménye a következő:

Első díjat kapott: Terpai Tamás, az ELTE matematikus hallgatója, aki a Fazakas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban érettségizett mint *Horváth Gábor* tanítványa.

Második díjat kapott a verseny 2–6. helyezettje: Hegedűs Ákos, a pécsi ciszterci Nagy Lajos Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Orovica Márkné* tanítványa; **Katona Gergely**, az ELTE fizikus hallgatója, aki a budapesti ELTE Trefort Ágoston Gyakorlóiskolában érettségizett mint *Szörényi Zoltán* tanítványa; **Pesti Gábor**, a nagykanizsai Batthyány Lajos Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Pirity János* tanítványa; **Péterfalvi Csaba Géza**, az ELTE geofizikus hallgatója, aki a szekszárdi Garay János Gimnáziumban érettségizett mint *Bayer József* tanítványa; **Tóth Bálint**, az ELTE fizikus hallgatója, aki a Fazakas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban érettségizett mint *Horváth Gábor* tanítványa.

Harmadik díjat kapott a verseny 7–10. helyezettje: Béky Bence, a Fazakas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium 10. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa; **Csillag Kristóf**, a püspökladányi Karacs Ferenc Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Lajtosné Buzási Márta* tanítványa; **Gáspár Merse Előd**, a Fazakas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa; **Patay Gergely**, a debreceni Tóth Árpád Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Kovács Miklós* és *Szegedi Ervin* tanítványa.

Dicséretben részesült a verseny 11–13. helyezettje: Buruzs Ádám, a szegedi Radnóti Miklós Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Mike János* tanítványa; **Czigler István**, a budapesti Lauder Javne Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Tóth Eszter* tanítványa; **Kenyeres Péter**, a POTE orvostanhallgatója, aki a zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnáziumban érettségizett mint *Pálovics Róbert* tanítványa.

Az 1. díjas versenyző 10 000 Ft pénzdíjazalmat és 5 000 Ft értékű könyvdíjazalmat, a 2. díjasok 6 000 Ft pénzdíjazalmat és 4 000 Ft értékű könyvdíjazalmat, a 3. díjasok 4 000 Ft pénzdíjazalmat és 4 000 Ft értékű könyvdíjazalmat, a dicséretben részesültek 3 000 Ft értékű könyvdíjazalmat kaptak.

Gratulálunk a nyerteseknek és tanáraiknak!

Gnädig Péter, Radnai Gyula



